Bankenformules

Op een spaarrekening wordt een bedrag gestort. Het jaarlijkse rentepercentage op deze spaarrekening is constant. Hierdoor groeit het bedrag op de spaarrekening exponentieel. Voor de spaarder is het interessant om te weten na hoeveel jaar het bedrag is verdubbeld.

De verdubbelingstijd is exact te berekenen met de formule $T = \dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$.

Hierin is T de verdubbelingstijd in jaren en p het jaarlijkse rentepercentage.

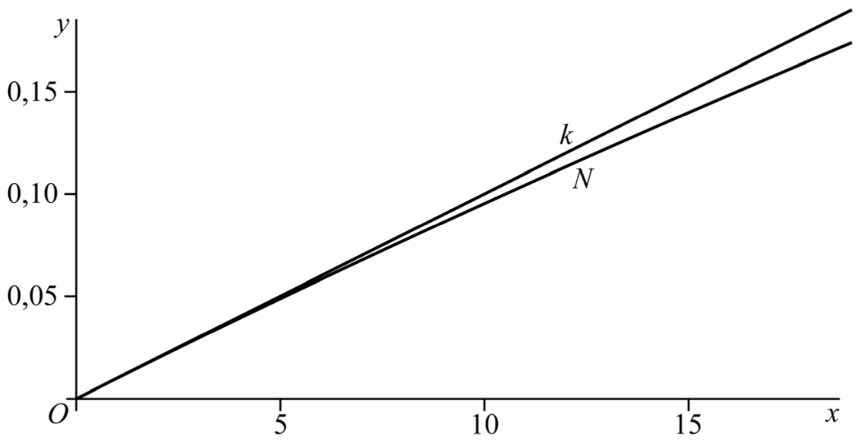
4p **8** Bewijs dat deze formule voor T correct is.

Als je geen rekenmachine gebruikt, is de formule voor T onhandig. Daarom gebruiken bankmedewerkers, als zij de verdubbelingstijd willen weten, formules die de exacte verdubbelingstijd benaderen. Zulke formules noemen we **bankenformules**. Om zo'n bankenformule te vinden onderzoeken we eerst de noemer van de formule voor T. We bekijken dus de functie N gegeven door:

$$N(x) = \ln\left(1+\frac{x}{100}\right) \text{ (met } x \geq 0\text{)}$$

In de figuur is de grafiek van N getekend. Ook is de raaklijn k aan de grafiek van N in O getekend.

figuur



Een vergelijking van k is $y = \frac{1}{100}x$. Als $x > 0$ ligt de grafiek van N onder lijn k. Verder geldt: als x groter wordt, dan wordt de verticale afstand tussen de grafiek van N en lijn k groter.

4p **9** Bewijs met behulp van differentiëren dat de verticale afstand tussen de grafiek van N en lijn k inderdaad groter wordt als x groter wordt.

Voor kleine positieve waarden van x ligt lijn k dicht bij de grafiek van N.
Je kunt dus zeggen dat voor kleine positieve waarden van p geldt dat $\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)$ ongeveer gelijk is aan $\frac{1}{100}p$. Dan geldt dus:

$$T \approx \frac{\ln(2)}{\frac{1}{100}p} \text{ ofwel } T \approx \frac{100\cdot\ln(2)}{p} \approx \frac{70}{p}$$

Daarmee is een voorbeeld gevonden van een bankenformule: de exacte verdubbelingstijd T kan voor kleine positieve waarden van p benaderd worden door $\frac{70}{p}$ te berekenen. Deze benadering noemen we T_1.

De benadering met de formule $T_1 = \frac{70}{p}$ verschilt voor toenemende waarden van p steeds meer van de waarde volgens de exacte formule, waarmee de benadering dus steeds slechter wordt. Daarom wordt in de praktijk het getal 70 in de teller aangepast als p groter wordt, bijvoorbeeld naar 72. Deze benadering noemen we T_2.

In de tabel wordt voor twee waarden van p de verdubbelingstijd in jaren volgens de bankenformules $T_1 = \frac{70}{p}$ en $T_2 = \frac{72}{p}$ vergeleken met de verdubbelingstijd volgens de exacte formule.

tabel

	rentepercentage	
	$p=1,5$	$p=5,5$
exacte formule $T = \dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$	46,56	12,95
bankenformule $T_1 = \frac{70}{p}$	46,67	12,73
bankenformule $T_2 = \frac{72}{p}$	48,00	13,09

In de tabel is te zien dat voor $p=1,5$ de bankenformule $T_1 = \frac{70}{p}$ een betere benadering geeft dan de bankenformule $T_2 = \frac{72}{p}$. In de tabel is ook te zien dat voor $p=5,5$ de benadering met $T_2 = \frac{72}{p}$ beter is dan met $T_1 = \frac{70}{p}$.

Vanaf een bepaald rentepercentage p geeft de formule $T_2 = \frac{72}{p}$ een betere benadering van de exacte verdubbelingstijd dan de formule $T_1 = \frac{70}{p}$.

5p **10** Bereken dit rentepercentage p. Geef je eindantwoord in één decimaal.